

Olimpiada de matematică – clasa a VIII-a
etapa zonală – 11 februarie 2012

1. Se consideră numerele reale x și y . Știind că $y - x = 2$, $y > 2$, arătați că expresia $E(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2(x - y + 1)}$ este constantă.

2. Fie $x, y \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2009}$. Arătați că

$\sqrt{\left(\frac{x}{41} - 49\right) \cdot \left(\frac{y}{41} - 49\right)}$ este număr natural.

3. Dacă $n \in \mathbf{N}$, arătați că $1 - \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} - \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} - \dots - \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} > 0$

4. Fie $AM = 12$ cm un segment pe dreapta perpendiculară pe planul triunghiului ABC . Fie $AN \perp MB$, $N \in BM$ și $AP \perp MC$, $P \in MC$. Se știe, că $AB = 5$ cm, $AC = 9$ cm și $BC = 13$ cm.

- a) Demonstrați, că $\square MPN \equiv \square MBC$!
- b) Calculați lungimea segmentului NP !

5. În prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ punctul O este centrul bazei $ABCD$, $BE \perp AC'$, unde $E \in AC'$. Se știe, că $AE = 9$ cm și $EC' = 16$ cm.

- c) Determinați mărimile prisme!
- d) Demonstrați, că $OE \perp AC'$!
- e) Calculați lungimea segmentului OE !

Popa Ionela, Popa Petru Cristian (1, 2, 3), Simon József (4,5)